a

Potęgowanie

Dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie to dopiero przedsmak tego, co można wyczyniać z liczbami. Jeśli już wydawało Ci się, że posiadasz pewną władzę nad arytmetyką, czas zobaczyć, czym w matematyce jest prawdziwa potęga.

Mnożenie to za mało

Intuicje

Potęgowanie jest działaniem wyższego rzędu niż mnożenie. Przypomnijmy sobie pierwsze kroki, jakie stawialiśmy w świecie matematyki, poznając, czym jest mnożenie. Zdefiniowaliśmy je jako wielokrotne dodawanie do siebie tej samej liczby:

Pięciokrotne dodanie do siebie trójki oznaczaliśmy jako „pięć razy trzy”, propagując, że mnożenie jest działaniem wyższego rzędu niż dodawanie. Na tej samej zasadzie definiujemy potęgowanie:

Pięciokrotne pomnożenie przez siebie trójki oznaczamy jako „trzy do potęgi piątej” i zapisujemy to jako trójkę posiadającą w *indeksie górnym* piątkę. Liczba, którą mnożymy przez siebie wielokrotnie, to *podstawa potęgi*, a ilość mnożeń, jakich dokonujemy, to *wykładnik potęgi*.

Ponieważ osiągamy powoli matematyczną dojrzałość i zapis w postaci wyrażeń algebraicznych nie jest nam obcy, możemy zdefiniować potęgowanie w trochę bardziej ogólnej formie:

Powyższy zapis ucieszy matematyka bardziej, niż wyjaśnianie potęgowania na przykładach, ze względu na swoją uniwersalność. Jest to dość formalna definicja potęgowania, która mówi, że pod oraz możemy podstawić dowolne liczby i zinterpretować napis jako pomnożenie liczby przez siebie razy. Możemy następnie dopowiedzieć, że w zapisie liczba jest podstawą potęgi, zaś liczba to wykładnik potęgi, a sam zapis nazywamy potęgą liczby .

Co ciekawe, chociaż dodawanie oraz mnożenie są działaniami łącznymi i przemiennymi, potęgowanie nie jest ani łączne, ani przemienne:

* nie jest tym samym co
* nie jest tym samym, co

Kwadraty i sześciany

Intuicje

W praktyce potęgowanie pełni rolę narzędzia matematycznego, dzięki któremu nie musimy pisać nużąco długich iloczynów, gdy jako czynnik pojawia się kilka razy ta sama liczba. Im dalej zagłębiamy się w matematyczne fantazje, tym bardziej oddalamy się od przyziemnych, namacalnych, życiowych zagadnień[[1]](#footnote-1). Potęgowanie stoi jeszcze na granicy abstrakcji i przy odrobinie dobrej woli możemy „zobaczyć” potęgowanie w naszym świecie.

Potrzebujemy klocków. Potęgowanie może być dobrą zabawą, a żeby tego dowieźć weźmiemy worek klocków z dzieciństwa. Na początek ustawimy klocki jeden obok drugiego, wzdłuż linii:

Pięć klocków w jednej linii możemy postrzegać jako , jakby piątka występująca w iloczynie tylko jeden raz. Następnie rozmieśćmy klocki na podłodze, jeden obok drugiego w regularnych rządkach i kolumnach:

Mamy pięć poziomych rzędów, a w każdym z nich mieści się pięć klocków, czyli razem:

Jeżeli masz pewną wprawę w rozpoznawaniu kształtów geometrycznych, możesz zauważyć, że powyższy obrazek przedstawia klocki ułożone w kwadrat. Z tego powodu drugą potęgę liczby nazywamy *kwadratem* tej liczby. Będziemy więc mówić, że „25 jest kwadratem liczby 5” lub że „5 do kwadratu wynosi 25”.

Postępując dalej w naszym szaleństwie, ułóżmy kwadraty z klocków w warstwy, jedna nad drugą:

Liczba klocków w naszej pokaźnej konstrukcji wynosi

ponieważ składa się ona z 5 warstw, a każda ma 25 klocków. Kształt, który przypomina nasza konstrukcja, to sześcian i z tego powodu trzecią potęgę liczby nazywamy *sześcianem* tej liczby. Będziemy mówić, że „125 jest sześcianem liczby 5” lub że „5 do sześcianu wynosi 125”.

Niestety tu nasza wizualizacja się kończy, jak również kończy się specjalne nazewnictwo kolejnych potęg. będziemy czytać po prostu jako „pięć do potęgi czwartej”. Graficzna reprezentacja czwartej potęgi wymagałaby właściwie czegoś w rodzaju czwartego wymiaru przestrzennego, a my jeszcze nie jesteśmy gotowi na SF.

Potęgowanie a kolejność wykonywania działań

Intuicje

Ponieważ mnożenie jest działaniem wyższego rzędu niż dodawanie, wykonujemy je jako pierwsze w działaniu. Podobnie, skoro potęgowanie jest działaniem wyższego rzędu niż mnożenie, będzie ono miało pierwszeństwo przed mnożeniem. Zaktualizowana kolejność wykonywania działań wyglądałaby następująco:

1. Działania w nawiasach;
2. Potęgowanie
3. Mnożenie i dzielenie w kolejności występowania;
4. Dodawanie i odejmowanie w kolejności występowania.

Tak więc:

Warto mieć na uwadze, że zapis oznacza „dwa do czwartej na minusie”, czyli liczbę ujemną o wartości -16, ale zapis to czwarta potęga liczby -2, a więc 16.

Potęgi o wykładniku całkowitym

Intuicje

Potrafimy już rozpracowywać zapiski typu , gdzie jest jakąś liczbą naturalną typu 1, 2, 3, 4, 5… zaś może być dowolną znaną nam liczbą: dodatnią, ujemną, ułamkową... W ramach ćwiczenia:

Warto zauważyć kilka podstawowych cech potęgowania:

* Dowolna liczba podniesiona do potęgi pierwszej to ta sama liczba:
* Jedynka podniesiona do dowolnej potęgi wynosi zawsze 1:
* Zero podniesione do dowolnej potęgi wynosi zawsze 0:
* Liczba ujemna podniesiona do potęgi parzystej daje wynik dodatni, a do potęgi nieparzystej ujemny:

Zastanówmy się, co się stanie, gdy podniesiemy liczbę do potęgi ujemnej. Warto zwrócić uwagę, że gdy podnosimy liczbę do coraz wyższych potęg, przy każdym kroku mnożymy poprzedni wynik przez tę liczbę:

Możemy spojrzeć na to z drugiej strony: gdy podnosimy liczbę do coraz niższych potęg, przy każdym kroku dzielimy poprzedni wynik przez podstawę:

Trzymając się tendencji, pójdźmy jeszcze o kilka kroków w lewo:

Docieramy do dwóch wartościowych spostrzeżeń:

* Dowolna liczba podniesiona do potęgi zerowej daje 1:
* Potęga o wykładniku ujemnym jest równa odwrotności potęgi o przeciwnym wykładniku:

Zauważmy, że przy badaniu potęg o ujemnych wykładnikach dokonywaliśmy dzielenia przez podstawę, a nie zapominajmy, że nie wolno dzielić przez 0. Co za tym idzie, nie wolno podnosić zera do potęg ujemnych. Kontrowersyjne pozostaje podnoszenie zera do potęgi zerowej. Technicznie rzecz biorąc przejście z do wymagałoby podzielenia przez 0, więc spora część matematyków nie godzi się na istnienie „zera do zerowej”. Z drugiej strony własność dotyczy dokładnie każdej liczby, zarówno dodatniej, jak i ujemnej, więc dlaczego by nie miała dotyczyć zera?... Ten dylemat podzielił matematyków – według niektórych nie istnieje, a według innych , jakkolwiek dziwnie to nie wygląda.

Jeśli jesteś ciekaw, jak dobrać się do potęg mających ułamek w wykładniku, zajrzyj do tematu „Pierwiastkowanie”.

Własności potęgowania

Formalnie

Dokonajmy jeszcze kilku przydatnych spostrzeżeń na temat potęgowania. Ponieważ zależy nam na osiągnięciu dojrzałości matematycznej, będziemy pracować na ogólnym przypadku, czyli na zmiennych literowych. W każdej chwili możesz podstawić sobie pod , lub jakąś konkretną liczbę i zobaczyć, jak poniższe wzory działają na żywo.

Jeśli liczbę mnożymy przez siebie razy, a następnie razy, to łącznie występuje jako czynnik razy.

Jeśli liczbę mnożymy przez siebie razy w liczniku ułamka i razy w mianowniku ułamka, to po skróceniu pozostanie czynników.

Wzór ten działa również wtedy, gdy :

Gdy liczbę mnożymy przez siebie razy, a następnie takie grupy mnożymy przez siebie razy, to w całym iloczynie wystąpi razy.

Jeśli liczbę mnożymy przez siebie razy, a do tego domnażamy liczbę również razy, to tak, jakbyśmy iloczyn mnożyli razy.

Gdy podnosimy do potęgi pewien ułamek, możemy osobno zająć się potęgowaniem licznika oraz mianownika.

Formalnie | Rozszerzenie

[wymagana znajomość tematu: Działania na wyrażeniach algebraicznych]

Powyższe wzory działają także dla wykładników ujemnych. Aby tego dowieść, wykorzystamy własności dla wykładników dodatnich, które udowodniliśmy powyżej.

* Rozważmy przypadek, gdy tylko jeden z wykładników jest ujemny (ze względu na przemienność mnożenia i dodawania, nie ma znaczenia, który). Mamy uzasadnić równość

przy czym same zmienne oraz mają wartości naturalne. Wykorzystując definicję potęgi o ujemnym wykładniku:

* W przypadku obydwu wykładników ujemnych mamy:
* Przypadek, gdy wykładnik potęgi w liczniku jest ujemny:
* Przypadek, gdy wykładnik potęgi w mianowniku jest ujemny:
* Przypadek, gdy obydwa wykładniki są ujemne:
* Przypadek, gdy wykładnik wewnętrznej potęgi jest ujemny:
* Przypadek, gdy wykładnik zewnętrznej potęgi jest ujemny:
* Przypadek, gdy obydwa wykładniki są ujemne:

Gdy wykładnik jest ujemny:

Gdy wykładnik jest ujemny:

1. i od Boga. [↑](#footnote-ref-1)